LABORATORIO DE ELECTRONICA Y COMPONENTES

FASCICULO I.- TEORIA DE ERRORES

I- CONCEPTOS BASICOS

II- CARACTERIZACION DE LA MEDIDA

POR:

T. RODRIGUEZ

J.A. MARTIN PEREDA

I. ESQUIVIAS

I N D I C E

TEORIA DE ERRORES

I.- CONCEPTOS BASICOS

Introducción

Frecuentemente vamos a necesitar conocer el valor de una determinada magnitud, bien sea corriente electrica, voltaje, - frecuencia... etc. La manera de conocer dicho valor es midiendo dicha magnitud.

Para poder realizar una medida necesitamos:

1- La magnitud a medir
2- Aparato de medida
3- Metodo de medida

Para fijar ideas, vamos a trabajar con un ejemplo muy sencillo. Supongamos un circuito como el representado en la figura 1

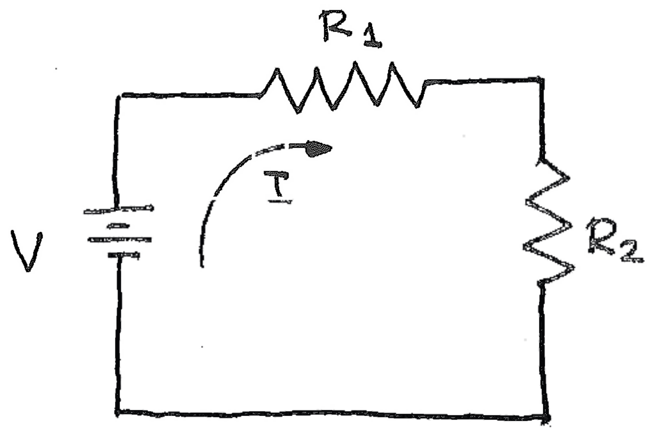
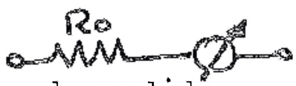
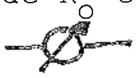


Figura 1

si queremos determinar la corriente que circula por el circuito, $I= V/(R_1+R_2)$, tenemos que disponer de algún aparato que sea sensible a dicha corriente bien de forma directa, bien de forma indirecta.

Representemos el aparato de medida como 

donde R_o es la resistencia electrica del aparato de medida y  es propiamente el sistema sensible a la corriente.

Supongamos que ya disponemos del aparato de medida, la pregunta que nos tenemos que hacer es: ¿como podemos medir con ese aparato?.

En principio se nos ofrecen varias opciones, algunas de - ellas estan representadas en las figuras 2-a y 2-b.

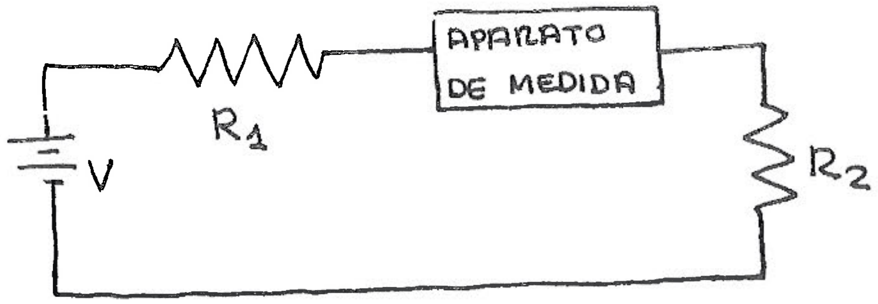


Figura 2a

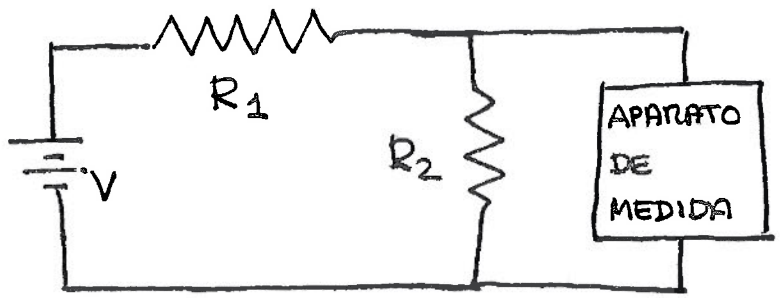


Figura 2b

Si aplicamos la ley de Ohm al primer caso, la corriente que circula por el circuito es

$$I_a = \frac{V}{R_1+R_2+R_0} \tag{1}$$

con objeto de simplificar el análisis, supongamos que R_0=0 ohm. en este caso

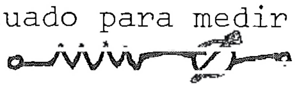
$$I_a = \frac{V}{R_1+R_2} \tag{2}$$

que como vemos coincide con el valor teorico.

En el segundo caso obtendriamos

$$I_b = \frac{V}{R_1} \tag{3}$$

ya que al ser $R_0=0$ ohm, la resistencia equivalente al paralelo de R_0 y R_2 vale 0 ohm. Como vemos este valor difiere del valor teorico.

A la vista de estos resultados podemos concluir que el método de medida adecuado para medir una corriente electrica mediante el sistema  es el representado en la figura 2-a y no el de la figura 2-b.

Por tanto vemos que el método de medida esta determinado por el aparato de medida de que disponemos.

I.-1 INFLUENCIA DEL APARATO DE MEDIDA SOBRE LA MAGNITUD A MEDIR

En el aparato anterior hemos obtenido como valor de la corriente que circula por el circuito antes de introducir el aparato de medida

$$I=\frac{V}{R_1+R_2} \qquad (4)$$

y cuando introduciamos el sistema de medida

$$I_a=\frac{V}{R_1+R_2+R_0} \qquad (5)$$

$$I_b=\frac{V}{R_1+R_2||R_0} \qquad (6)$$

en ambos casos vemos que tanto I_a como I_b difieren del valor I.

Este hecho lo podemos extender a cualquier medida y lo podiamos enunciar como: CUANDO MEDIMOS UNA MAGNITUD MODIFICAMOS EL VALOR DE DICHA MAGNITUD.

Dicho de otra manera: LA MAGNITUD MEDIDA ES DIFERENTE DE LA MAGNITUD QUE SE DESEA MEDIR POR EL SIMPLE HECHO DE REALIZAR LA MEDIDA.

La medida sera tanto mejor cuanto menor sea dicha perturbación.

I.-2 FLUCTUACIONES ESTADISTICAS DE LA MAGNITUD A MEDIR

Otro punto a poner de manifiesto es el hecho de que la mayor parte de los fenomenos son estadísticos por naturaleza. Siempre presentan fluctuaciones. Como ejemplo: supongamos una corriente continua de valor 1 Amp.

$$1\text{Amp} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ segundo}} = \frac{1}{1{,}6.10^{-19}} \frac{\text{electrones}}{\text{segundo}} =$$

$$= 6\ 10^{18} \text{ electrones/segundo}$$

(recuerde que cada electrón transporta una carga discreta e igual a $1{,}6.10^{-19}$ culombios)

Parece bastante improbable que siempre pasen por segundo 6.10^{18} electrones, una vez pasara por ejemplo $6.10^{18}+10^{8}$ elect/seg, fijense que estamos hablando de fluctuaciones de 1 parte en 10^{11}, magnitud totalmente ridicula pero que hace que el valor de la magnitud no sea constante. De hecho si ustedes miden con una gran amplificación una corriente de un valor supuestamente constante veran que está fluctuando por encima y por debajo de un cierto valor (valor medio).

Esto hace que la magnitud tenga en cada instante de tiempo un valor diferente, entonces ¿cual es el verdadero valor que tiene la magnitud?.

Esta consideración junto con la obtenida en el apartado I-1 nos llevan al hecho de que: EL VERDADERO VALOR DE UNA MAGNITUD MEDIDA NO ES NUNCA CONOCIDO CON ABSOLUTA CERTEZA.

Dicho en otras palabras siempre tendremos un cierto ERROR en la magnitud medida.

I.-3 DEFINICIONES DE EXACTITUD, ERROR Y PRECISION

Nos interesa por lo tanto conocer la diferencia entre el valor medido y el valor real, como este no lo podemos conocer tendremos que establecer un límite o alguna acotación que nos permita determinar cuanto de proximo o lejano nos encontramos a dicho valor.

Definiremos como EXACTITUD de una medida:

Proximidad al valor real de la magnitud medida. La medida de dicha exactitud nos vendra dada por esa acotación error, que nos dice cuanto de proximo nos encontramos al valor real, (sin conocer exactamente dicho valor).

Definiremos como ERROR de una medida:

Incertidumbre estimada en la magnitud medida. La exactitud de una medida nos va a depender fundamentalmente de dos factores:

1- Error introducido por el simple hecho de medir, fenomeno este ya estudiado en apartados anteriores.

2- Error debido a la inexactitud del aparato de medida.

Un aparato de medida puede ser inexacto, como ejemplo más sencillo podemos suponer una regla en la cual cada centimetro marcado en la regla mide realmente 0,9 cm. Si medimos con esta regla una distancia de 9cm la lectura de la misma seria de 10cm.

Dos aparatos identicos, exacto el uno inexacto el otro, perturbarian por igual la medida al introducirlos en el sistema a medir, pero además el aparato inexacto introduce un error adicional debido a su propia inexactitud.

Tenemos que definir otro concepto que es el de precisión; aqui tenemos que distinguir entre precisión de un aparato y precisión de una medida y además no confundir nunca con exactitud.

PRECISION DE UN APARATO: Definición nítida

Supongamos dos reglas exactas, una de ellas esta dividida de 1cm en 1cm exactamente y otra que se encuentra dividida en milimetros exactamente; diremos que la segunda esmás precisa que la primera.

Aun en el caso de que la primera fuera exacta y la segunda no, diriamos que la segunda es más precisa que la primera.

NO CONFUNDIR PRECISION CON EXACTITUD. Son dos conceptos diferentes:

Exactitud.- Proximidad al valor real

Precisión.- Definición nitida

Un aparato puede ser muy preciso pero muy inexacto.

PRECISION DE UNA MEDIDA. Cuando se realizan varias medidas de una misma magnitud se obtiene generalmente diferentes valores de la misma. Estos valores se encontraran más o menos proximos a un cierto valor central. Una medida sera muy precisa cuando dichos valores esten todos muy agrupados respecto a dicho valor central y, sera poco precisa cuando los valores esten muy disperos. No se debe confundir otra vez una medida muy precisa con una medida muy exacta. Suponga que se mide la corriente que circula por un circuito y obtenemos los valores

1 Amp; 1,01; 1,00; 1,01; 0,99; 1,00; 1,00

como se observa las medidas estan muy agrupadas respecto al valor 1,00. Diremos que la medida es muy precisa. Sin embargo, el aparato de medida tenia la particularidad de que cuando indica 1,00 Amp realmente circula una corriente de 0,1 Amp. Como se ve la medida es muy precisa, todos los valores están muy agrupados, sin embargo es muy inexacta.

I.-4 TIPOS DE ERROR

Generalmente a los errores se los clasifica en:

1) Sistematicos
2) Residuales

Errores sistematicos son aquellos que, en principio, pueden evitarse o corregirse.

Errores residuales son aquellos que inevitablemente permanecen aunque se elimen todos los sistematicos.

Estos términos son confusos, normalmente en el resultado final suelen existir ambos tipos de errores. Los errores sistematicos no son necesariamente constantes, ya que pueden variar con las condiciones del experimento y comportarse de forma irregular, fluctuando con el tiempo. Dado que los errores sistematicos puede, en principio, ser reducidos o corregidos, quizá fuese mejor expresión errores "corregibles" o .determinados".

Los errores sistematicos los podemos clasificar en cuatro grandes categorias:

a) Errores grandes.- Consisten en confusiones tales como mala lectura de los instrumentos, ajuste incorrecto de los aparatos, utilización impropia de los instrumentos, confusión de computo y otros.

b) Errores instrumentales.- Son defectos de los instrumentos tales como error de calibrado, defectos internos, partes - desgastadas o defectuosas y otras.

c) Errores ambientales.- Son influencias físicas sobre el - equipo que se utiliza, o la magnitud que se mide. Tales errores se pueden atribuir a temperatura, presión, humedad,... etc.

d) Errores del observador.- S on debidos a habitos del observador tales como técnica imperfecta, júicio inexacto, forma peculiar de realizar las observaciones y otros.

Los errores residuales no pueden subdividirse en categorias convenientes, ya que son motivados por gran variedad de - causas. Algunas de ellas pueden ser completamente desconocidas en un experimento dado. Estos errores incontrolables no se pueden evitar en ninguna medida y con frecuencia producen fluctuaciones que no siguen regla alguna. Frecuentemente están producidos por la combinación errática de gran número de pequeños efectos.

II.- CARACTERIZACION DE LA MEDIDA

Introducción

El resultado de una medida se expresa como

$$\bar{x} \pm \varepsilon$$

donde $\bar{x}$ es el valor medio de la magnitud medida y ε es el error estimado. De entre las diferentes maneras de acotar el error, nosotros utilizaremos dos de ellas

a) Desviación normal σ

b) Limite de error

A continuación, vamos a analizar cada uno de los terminos utilizados anteriormente.

II.-1 VALOR MEDIO

Dada una magnitud discreta x, la cual puede tomar un conjunto de valores $x_1 \ldots\ldots x_m$. Supongamos que medimos N veces el valor x y obtenemos n_1 veces el valor x_1, n_2 veces el valor x_2 ....etc. Definimos su valor medio, $\bar{x}$ como

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m}{N} = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{n_i}{N} \qquad (1)$$

donde $N = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_m$.

Los valores x_i, que puede tomar la magnitud x, reciben el nombre de variantes y su conjunto el de datos primarios.

El termino n_i/N cuando $N \to \infty$, es por definición la probabilidad de que al realizar una medida obtengamos el valor x_i. Si denominamos a la probabilidad de obtener un cierto valor x_i de la magnitud como $P(x_i)$, la expresión (1) se nos convierte en

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \, P(x_i) \qquad (2)$$

La definición anterior es para una magnitud discreta. Sin embargo, en Electrónica, tenemos que trabajar generalmente con señales analógicas; por ello vamos a definir el valor medio de una magnitud analógica x, que en principio puede tomar todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$.

El valor medio para este caso lo definimos como

$$\bar{x}= \int_{-\infty}^{+\infty} x\ p(x)\,dx \tag{3}$$

donde p(x) se denomina <u>densidad de probabilidad</u> y p(x)dx representa la probabilidad de que al realizar una medida obtengamos un valor de x comprendido entre x y x+dx.

Estas definiciones son generales y abarcan todo tipo de magnitudes. En Electrónica las magnitudes analógicas que más se utilizan son señales que varian con el tiempo. En ese caso, la expresión del valor medio toma la forma

$$\bar{x}= \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t)\,dt \tag{4}$$

expresión esta muy conocida del cálculo integral. T es el intervalo de tiempo durante el cual deseamos promediar la señal.

La definición dada de valor medio nos indica realmente poco del significado del mismo. Para profundizar en su significado es necesario definir el término <u>desviación</u>.

Definimos como <u>desviación</u> a la diferencia entre un valor cualquiera de la magnitud y otro elegido arbitrariamente

$$d_i = x_i - x \tag{5}$$

sumemos ahora todas las desviaciones y calculemos que valor de x hace cero a dicha suma. Será

$$D= n_1(x_1-x)+n_2(x_2-x)+\ldots+n_m(x_m-x) \tag{6}$$

$$= n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_mx_m-xN \tag{7}$$

Si esta suma tiene que ser cero, el valor de x que lo satisface es

$$x= \frac{1}{N}(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_mx_m) \tag{8}$$

que es, como puede verse comparando con (1), la definición de valor medio.

Lo anterior nos permite decir asi que el valor medio es el mejor valor de los valores obtenidos para la magnitud medida. Para este valor, la suma de las desviaciones positivas, $x_i>\bar{x}$, es igual a la suma de las desviaciones negativas, $x_i<\bar{x}$.

Es posible demostrar también que el valor medio es el valor con respecto al cual la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínimo. En efecto, el cuadrado de la desviación inésima viene dada por

$$d_i^2 = (x_i - x)^2 \tag{9}$$

y la suma de todas los posibles por

$$S = \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i^2 + x^2 - 2xx_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} n_i x^2 - 2\sum_{i=1}^{m} n_i x x_i \tag{10}$$

La condición necesaria para la existencia de un mínimo es que la primera derivada sea cero. Derivando entonces con respecto a x obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x^2\right) - 2\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i x\right) =$$
$$= +2Nx - 2\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \tag{11}$$

y si igualamos esta derivada a cero obtenemos como valor de x

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{N} x_i \tag{12}$$

que coincide con la definición de valor medio dada previamente.

A causa de esta propiedad, es por lo que se dice que el valor medio es el valor más probable de los valores obtenidos para la magnitud medida.

Estas propiedades del valor medio no aseguran que éste sea la mejor estimación de la cantidad que se mide. Estas propiedades se mantienen para cualquier grupo de variantes, sean éstas o no dignas de crédito.

II.-2 MOMENTO DE ORDEN N Y MOMENTO CENTRAL DE ORDEN N

Si tenemos un conjunto de variantes $x_1 \ldots x_m$ de una magnitud medida y damos como único dato su valor medio, perdemos una gran cantidad de información acerca de dicha medida. Tomemos como ejemplo la medida de una misma magnitud realizada, por dos experimentadores diferentes, en identicas condiciones. Supongamos, para simplificar, que el total de medidas es unicamente dos. El primer experimentador obtiene como valores de la magnitud +1 y -1 y el segundo +10 y -10. El valor medio en ambos casos es cero, sin embargo, el primer experimentador ha realizado unas medidas que se aproximan mucho más al valor medio que el segundo. Las medidas del primer experimentador son mucho mejores que las del segundo. Si damos como único dato en ambos casos el valor medio de la magnitud, ambas medidas son iguales.

A la vista de lo anterior tenemos que añadir al dato del valor medio alguna indicación de cuánto estan separados los valores medidos de la magnitud de dicho valor medio.

Para caracterizar una magnitud, además del valor medio, se utilizan así los momentos de orden n.

Para una magnitud continua se define el *momento de orden n* como

$$E(x^n)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\,dx \qquad (13)$$

Si n=1 obtenemos el momento de orden 1 que coincide con la definición dada anteriormente del valor medio

TAmbién se utilizan los momentos centrales. La definición del *momento central de orden n* es

$$\mu_n= E((x-\bar{x})^n)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^n p(x)\,dx \qquad (14)$$

II.-3 MOMENTOS DE ORDEN 2: VARIANCIA

De todos ellos, el más utilizado es el momento central de orden 2 que se representa como σ^2 y se denomina *variancia* o *dispersión*; su valor es

$$\mu_2= E((x-\bar{x})^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 p(x)\,dx \qquad (15)$$

La raiz cuadrada del mismo se conoce como *desviación normal*.

Para una variable discreta la variancia toma la forma de

$$\sigma^2= \frac{1}{n-1}\{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\dots+n_m(x_m-\bar{x})^2\}=$$
$$=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(x_i-\bar{x})^2 \qquad (16)$$

A veces se utiliza la denominada desviación eficaz σ_{ef}, definida por

$$\sigma^2_{ef}= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i(x_i-\bar{x})^2 \qquad (17)$$

Si N>>1 se confunden el valor de la desviación normal y el de la desviación eficaz. Si N=25, la desviación eficaz es sólo un 2% menor que la desviación normal.

Las definiciones dadas anteriormente son totalmente generales y se pueden aplicar a toda clase de magnitudes independientemente de cual sea su función densidad de probabilidad o de la forma de variación de n_i/N. Existe, sin embargo, una distribucción muy característica denominada distribución normal o gaussiana. En ese caso, y unicamente en dicho caso, la probabilidad de que al realizar una medida el valor de la magnitud medida se encuentre entre $x-\sigma$ y $x+\sigma$ es del 68%, o bien, la probabilidad es del 95% de que el valor de la magnitud se encuentre entre $x-2\sigma$ y $x+2\sigma$.

Com ya indicamos en el apartado anterior, las señales analógicas que vamos a utilizar son variables en el tiempo; en ese caso el momento central de orden 2, o la variancia como la denominaremos a partir de ahora, se convierte en

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x^2(t)-\bar{x})\,dt \qquad (18)$$

En el caso de que la magnitud tenga un valor medio cero, la expresión anterior se nos conviente en

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\,dt \qquad (19)$$

expresión esta que coincide con la definición del cuadrado del valor eficaz de una señal alterna.

De forma más general el momento de orden 2 de una magnitud continua, variable en el tiempo, es el cuadrado del valor eficaz de la misma.

Al utilizar el cuadrado de las desviaciones se evita que las desviaciones positivas y negativas se compensen entre si, quedando igualmente reflejada una desviación positiva como una desviación negtiva.

Continuando con el ejemplo del comienzo de este apartado

1º experimentador valor medio=0 desviaciones=+1 y -1

2º experimentador valor medio=0 desviaciones=+10 y -10

para el primer experimentador la variancia vale

$$\sigma^2 = \frac{1}{2-1}\,(1^2+(-1)^2) = 2$$

para el segundo experimentador

$$\sigma^2 = \frac{1}{2-1}\,(10^2+(-10)^2) = 200$$

Si damos como valor de la magnitud medida el valor medio y la desviación normal, tenemos

1º experimentador $0 \pm \sqrt{2}$

2º experimentador $0 \pm 10\sqrt{2}$

Esto nos indica que las medidas del primer experimentador son mejores que las del segundo; dicho de otra manera extan más proximas al valor medio de la magnitud medida.

II.-4 LIMITE DE ERROR

Entendemos como límite de error aquel valor que hace que el resultado de cualquier medida que realicemos se encuentre dentro del intervalo de valores $\bar{x}-L \leq x \leq \bar{x}+L$

Supongamos que hemos realizado 5 medidas de una magnitud cualquiera y que los resultados de las mismas han sido 1, 4, 5, 6, 9. El valor medio sería 5 y el límite de error será aquel valor que cumpla $\bar{x}-L= 1$ $\bar{x}+L= 9$ obteniendo para L el valor 4. Especificariamos la medida como

$$5 \pm 4$$

Si bien hemos indicado que el resultado de la medida era $\bar{x} \pm L$ el límite de error no tiene porque ser simétrico. Supongamos que la primera medida en lugar de ser 1 fuera 3, entonces obtendriamos como valor medio 5,40 y los límites de error serian

$$\bar{x}-L_1= 3 \qquad L_1= 2,4$$

$$\bar{x}+L_2= 9 \qquad L_2= 3,6$$

la medida en este caso la especificariamos como

$$5,4^{+3,6}_{-2,4}$$

II.- 5 COMPARACION ENTRE LIMITE DE ERROR Y DESVIACION NORMAL

Vamos a utilizar como base de comparación los ejemplos utilizados en el apartado anterior.

La desviación normal ya la hemos difinido anteriormente y su valor para una magnitud discreta venia dado por

$$\sigma_x = \left\{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i-\bar{x})^2\right\}^{1/2}$$

en nuestro caso, para la primera media toma el valor de $\sigma_1=2,9$. En el segundo caso sería $\sigma_2=2,0$.

Si especificamos el error dando la desviación normal tendriamos

1ª medida   5±2,9

2ª medida   5,4±2,0

Como se puede observar comparando los resultados de las medidas, aquellos que dan como error el límite de error son más pesimistas que aquellas que nos dan la desviación normal. Recuerde que la desviación normal no nos acotaba todos los posibles valores de la magnitud, sino que en el caso de que la magnitud tuviera una distribución gaussiana nos indicaba que la probabilidad de que al realizar una medida el resultado de la misma estuviera comprendida entre $\bar{x}+\sigma$ y $\bar{x}-\sigma$ era 0,68.

Un hecho importante es que si realizamos un conjunto de medidas de cualquier magnitud, cuanto mayor sea el número de estas más proximas estaremos a una distribución gaussiana de las mismas, independientemente de cual sea la distribución de probabilidad de la magnitud. Dicho de otra manera, si el número de medidas es suficientemente grande la distribución de la misma es gaussiana.

Si la distribución no es gaussiana el valor de σ es meramente indicativo y no tiene ningún significado especifico.

A la vista de lo anterior queda claro que cuando se especifica el resultado de un conjunto de medidas, hay que indicar que tipo de error estamos utilizando, si límite de error o desviación normal.

II.-6 DESVIACION NORMAL DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

A veces una magnitud no la medimos directamente sino que la obtenemos a partir de otras magnitudes que si han sido medidas, i, e; conocido el valor de una resistencia y la caida de potencial en sus bornas podemos determinar la corriente que circula a su traves.

La expresión que nos permite determinar de forma aproximada la variancia de una función de varias variables, conocidas las variancias de cada una de ellas, es:

$$\sigma_F^2 \simeq \left(\left(\frac{\sigma F}{\sigma x}\right)_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}} \sigma_x\right)^2 + \left(\left(\frac{\sigma F}{\sigma y}\right)_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}} \sigma_y\right)^2 + \left(\left(\frac{\sigma F}{\sigma z}\right)_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}} \sigma_z\right)^2$$

donde $F= F(x,y,z)$

$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ son las desviaciones normales de las variables x,y,z

σ_F es la desviación normal de la función F.

El significado de $(\frac{\partial F}{\partial x})_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}$ es el siguiente: Hallada la derivada parcial de F(x,y,z) respecto a x se calcula su valor numérico, sustituyendo x,y,z por sus respectivos valores medios $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

La expresión anterior será tanto más aproximada cuanto más pequeñas sean las desviaciones normales de cada una de las variables.

La demostración matemática de la expresión anterior se encuentra en el apendice B.

II.-7 LIMITE DE ERROR DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

De forma semejante a como se hizo en el apartado II.-6 definimos el límite de error de una función F=F(x,y) como:

$$L_F \simeq \left| \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} L_x \right| + \left| \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} L_y \right|$$

donde L_x, L_y son los límites de error correspondientes a las magnitudes x e y respectivamente.

Dado que el límite de error L es siempre mayor o igual que la desviación normal, σ, la validez de la expresión anterior es aún más cuestionable que la obtenida en el apartado II-6 para la desviación normal. Esta expresión sera tanto más exacta cuanto más pequeño sea el límite de error, en el caso de que L→0 la expresión de L_F sera exacta. En cualquier caso nos proporcionara una indicación de cual es el límite de error de una función de varias variables en función de los límites de error de las mismas.

A P E N D I C E S

A.- VALOR MEDIO Y DESVIACION NORMAL DEL CONJUNTO SUMA

Vamos a calcular el valor medio y la desviación normal de la magnitud suma de dos magnitudes independientes de las cuales conocemos sus datos primarios

$$x_1 \ldots\ldots x_n \quad e \quad y_1 \ldots\ldots y_m$$

cuyo valores medios son $\bar{x}$ e $\bar{y}$ y sus desviaciones normales σ_x y σ_y respectivamente.

Los valores de la magnitud suma son

$$S_{ij} = x_i + y_j \tag{1}$$

Para calcular el valor medio de la misma calculemos primero la suma de todos sus posibles términos; para simplificar, supondremos que $n_i = 1$ para todos los valores.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} S_{ij} &= (x_i+y_1)+(x_1+y_2)+\ldots+(x_1+y_m)+\\ &+(x_2+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_2+y_m)\\ &+(x_n+y_1)+(x_n+y_2)+\ldots+(x_n+y_m)=\\ &= m(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n(y_1+y_2+\ldots+y_m)\end{aligned} \tag{2}$$

El número total de términos que tenemos asi es de nm. El valor medio será

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{nm}\sum S_{ij} = \frac{1}{mn}\left(m(x_1+\ldots+x_n)+n(y_1+\ldots+y_m)\right)=\\ &= \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} + \frac{y_1+\ldots+y_m}{m} = \bar{x}+\bar{y}\end{aligned} \tag{3}$$

De forma semejante se puede demostrar que el valor medio del conjunto diferencia es

$$\bar{d} = \bar{x}-\bar{y} \tag{4}$$

Ahora, vamos a determinar cuanto vale la desviación normal del conjunto suma. Con objeto de facilitar los calculos haremos la hipotesis de que n y m son mucho mayor que uno. Por definición de valor eficaz, con las hipótesis anteriores

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{nm}\sum_{ij}(S_{ij}-\bar{S})^2 =$$

$$= \frac{1}{nm} \sum_{ij} (x_i+y_j-\bar{x}-\bar{y})^2 =$$

$$\simeq \frac{1}{nm} \left(\sum_{ij} (x_i-\bar{x})^2+\sum_{ij} (y_j-\bar{y})^2+2\sum_{ij} (x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})\right) \qquad (5)$$

Vamos a analizar cada uno de los terminos del corchete

$$\sum_{i,j} (x_i-\bar{x})^2=m \sum_{i} (x_i-\bar{x})^2=m(n-1)\sigma_x^2\simeq mn\sigma_x^2 \qquad (6)$$

$$\sum_{i,j} (y_j-\bar{y})^2=n \sum_{j} (y_j-\bar{y})^2=n(m-1)\sigma_y^2\simeq mn\sigma_y^2 \qquad (7)$$

$$2 \sum_{i,j} (x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})=2 \sum_{i} (x_i-\bar{x})\sum_{j} (y_j-\bar{y})=0 \qquad (8)$$

ya que por la definición de valor medio, $\sum_{i} (x_i-\bar{x})=0$, $\sum_{j} (y_j-\bar{y})=0$

Por tanto obtenemos como valor de σ_s^2

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{nm}(mn\sigma_x^2+mn\sigma_y^2)\simeq\sigma_x^2+\sigma_y^2 \qquad (9)$$

De una forma semejante podiamos demostrar que la variancia del conjunto diferencia vale

$$\sigma_d^2\simeq\sigma_x^2+\sigma_y^2 \qquad (10)$$

que como se ve coincide con el anterior. Este resultado es muy importante ya que nos indica que si bien el valor medio del conjunto diferencia era la diferencia de los valores medios de las magnitudes, la variancia del conjunto diferencia es la suma de las variancias de las magnitudes, no compensandose en consecuencia entre si.

Estos resultados se pueden extender a un conjunto de p grupos de variables independientes. La variancia del conjunto - suma seria

$$\sigma_s^2= \sigma_1^2+\sigma_2^2+.....+\sigma_p^2 \qquad (11)$$

Este resultado se puede presentar de una forma más general

Tengamos el conjunto de variantes $cx_1, cx_2....cx_n$ donde c es una constante; si el conjunto de variantes $x_1, x_2...x_n$ tiene una desviación normal σ_x, entonces la desviación normal del conjunto cx_i vale

$$\sigma_{cx}= \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i} (cx_i-c\bar{x})^2\right)^{1/2}= c\sigma_x \qquad (12)$$

este resultado extendido al conjunto suma de p conjuntos de la forma $c_i x_i$ se expresa como

$$\sigma_s^2 = (c_1\sigma_1)^2+(c_2\sigma_2)^2+\ldots\ldots+(c_p\sigma_p)^2 \qquad (13)$$

B.- DESVIACION NORMAL DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Vamos a obtener una expresión aproximada que nos permita determinar la desviación normal de una función de un número cualquiera de variables independientes conocidas las desviaciones normales de estas.

Para simplificar el desarrollo supongamos que la función es de dos variables unicamente

$$F= F(x,y)$$

sean $\bar{x}$ e $\bar{y}$ los valores medios y σ_x y σ_y las desviaciones normales de las variables x e y respectivamente. Si las variables x e y varian alrededor de su valor medio $\bar{x}$ e $\bar{y}$ en dx y dy respectivamente, el cambio en el valor de F viene dado por

$$dF= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} dy \qquad (14)$$

Esta expresión es solo valida para cambios infinetisimales, sin embargo, es aproximada para pequeñas desviaciones.

Las desviaciones dx y dy pueden considerarse como dos grupos independientes de variables, cada uno de ellos multiplicadas por una constante diferente y sumadas para dar dF.

La variancia de dF la podemos expresar de acuerdo con la expresión (11) como

$$\sigma_{dF}^2 \simeq \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_{dx}\right)^2+\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_{dy}\right)^2 \qquad (15)$$

Vamos a calcular cuanto vale la variancia de dx en función de la variancia en x

$$x= \bar{x} + dx \qquad (16)$$

La variación de este conjunto suma vale

$$\sigma_x^2= \sigma_{\bar{x}}^2+\sigma_{dx}^2 \qquad (17)$$

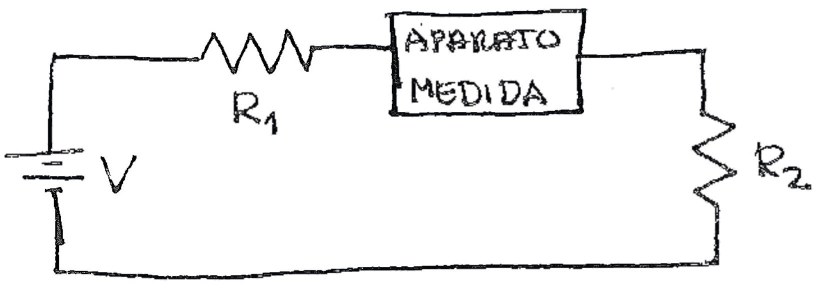
como

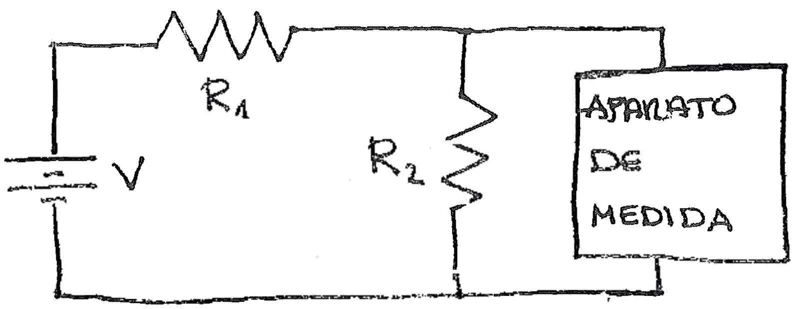
$$\sigma_{\bar{x}}^2= \frac{1}{n} \sum_j (\bar{x}-\bar{x})^2=0$$

donde R_0 es la resistencia electrica del aparato de medida y - es propiamente el sistema sensible a la corriente.

Supongamos que ya disponemos del aparato de medida, - la pregunta que nos tenemos que hacer es: ¿como podemos medir -- con ese aparato?.

En principio se nos ofrecen varias opciones, algunas- de ellas estan representadas en las figuras 2-a y 2-b.





Si aplicamos la ley de Ohm al primer caso, la corriente que circula por el circuito es

$$I_a = \frac{V}{R_1+R_2+R_0} \qquad (1)$$

con objeto de simplificar el análisis, supongamos que R_0=0 ohm, en este caso

$$I_a = \frac{V}{R_1+R_2} \qquad (2)$$

BIBLIOGRAFIA

- Analisis de medidas eléctricas. Frank - Mc Graw Hill (1969)
- Instruments and Measurements for Electronics. Herrich. Mc Graw Hill (1972)
- Errores y exactitud. The Open University. Curso Básico de Matematicas. Unidad 2 (1974). Mc Graw Hill
- El manejo de Datos experimentales. The Open University. Curso Basico de Ciencias. Unidad E (1974). Mc Graw Hill

LABORATORIO DE TECNOLOGIA Y COMPONENTES

PROBLEMAS

I-1.- Supongase que I_1=100±2 amp e I_2=200±5 amp y que se quiere determinar el error de la corriente suma $I=I_1+I_2$. 1°) Calcularlo suponiendo que los errores dados son límites de error. 2°) Si los errores son desviaciones normales

Solución: 1°) 300±7, 2°) 300±5'4 Amp

I-2.- Dadas dos magnitudes A=100±10 y B=100±1, calcular el error en la suma de ambas magnitudes. Suponga que: a) los errores son límites de error; b) son desviaciones normales.

Solución: a) 200±11, b) 200±10

I-3.- Se conectan en paralelo dos resistencias R_1=400±40 y R_2==600±80 ohmios. Los errores dados son desviaciones normales ?Cual es la resistencia resultante y cual su desviación normal?

Solución: 240±19'3 Ohmios

I-4.- Queremos determinar el error con el que podemos conocer el valor de una resistencia, entre cuyos extremos existe una caida de potencial de 100±12V circulando una corriente por ella de I=10±2 amp. Suponga que los errores son limites de error.

Solución: $10^{+4}_{2'7}$ Ohmios

I-5.- Resolver el problema anterior suponiendo que los errores dados son desviaciones normales.

Solución: 10±2'3 Ohmios

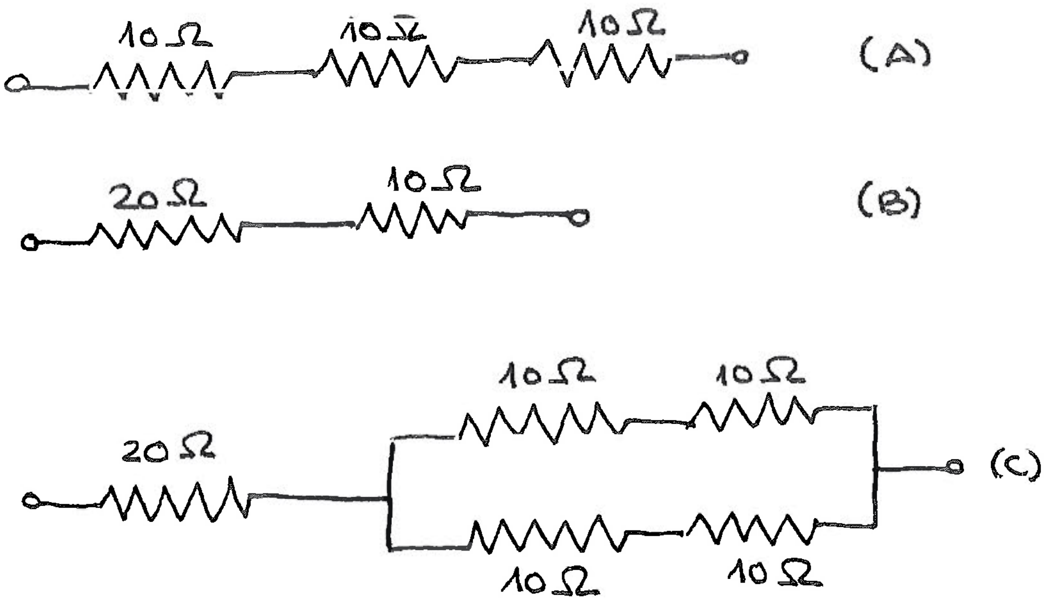
I-6.- La caida de voltaje en una resistencia de desviación normal 0'1 por 100 debe mantenerse dentro de ±0'2 por 100 de su valor medio. ¿Cual debe ser la exactitud del amperimetro que se utiliza para medir la corriente?

Solución: 0'17%

I-7.- La caida de potencial en una resistencia de desviación normal 0'1 por 100 se mantiene dentro del 0'2% de su valor medio. ¿Con que exactitud conocemos la corriente que circula a traves de la resistencia?

I-8.- Se dispone de 5 resistencias, una de 20Ω y cuatro de 10Ω cada una. La desviación normal de la de 20Ω es del 5% y las de cada una de las de 10Ω del 10%. En la figura se ven tres conexiones posibles de estas resistencias. ¿Que conexión es la mejor para obtener una resultante de 30Ω con el mínimo error?. ¿Cual es la desviación normal de esta conexión mpas favorable?.

Solución: C, $30 \pm \sqrt{5}/2$ Ohmios



I-9.- La resistencia de un hilo de cobre viene dada por

$$R = r_0(1+\alpha(t-20))$$

donde $r_0=4\Omega \pm 0'2$ por 100 es la resistencia a 20°C, $\alpha=0'004$ por grado centigrado ±1 por 100 es el coeficiente de temperatura del cobre y $t=25\pm1$°C es la temperatura real del hilo. Los errores citados se refieren a desviaciones normales. ¿Cuanto vale R y su desviación normal?

Solución: 4'08 ±0'44% Ohmios

SOLUCIONES

I-1.

$$I = I_1 + I_2$$

1º.-

$$I_{Medio} = I_{1Medio} + I_{2Medio} = 100 + 200 = 300 \text{ Amp.}$$

$$I_{Max} = I_{1Max} + I_{2Max} = 102 + 205 = 307 \text{ Amp}$$

$$I_{Min} = I_{1Min} + I_{2Min} = 98 + 195 = 293 \text{ Amp}$$

$$L^{+} = I_{Max} - I_{Medio} = 307 - 300 = 7 \text{ Amp}$$

$$L^{-} = I_{Min} - I_{Medio} = 293 - 300 = -7 \text{ Amp}$$

$$I = 300 \pm 7 \text{ Amp}$$

2º.-

$$I_{Medio} = 100 + 200 = 300 \text{ Amp}$$

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial T_1}\right)_{\bar{I}_1, \bar{I}_2} \sigma_{I_2}^{2} + \left(\frac{\partial I}{\partial I_2}\right)_{\bar{I}_1, \bar{I}_2} \sigma_{I_2}^{2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial I_1} = 1 \qquad \frac{\partial I}{\partial I_2} = 1$$

$$\sigma_I^2 = (2)^2 + (5)^2 = 29 \qquad \sigma_I = 5'4$$

$$I = 300 \pm 5'4 \text{ Amp}$$

I-3

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Al ser R_1 y R_2 variables separadas

$$R_{p_{Medio}} = \frac{R_{1_{Medio}} \cdot R_{2_{Medio}}}{R_{1_{Medio}} + R_{2_{Medio}}} = \frac{400 \cdot 600}{400 + 600} = 240\Omega$$

$$\sigma^2_{R_p} \simeq \left(\frac{\partial R_p}{\partial R_1}\right)_{\overline{R}_1,\overline{R}_2} \sigma_{R_1}^{2} + \left(\frac{\partial R_p}{\partial R_2}\right)_{\overline{R}_1,\overline{R}_2} \sigma_{R_2}^{2}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1+R_2) - R_1 R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial R_2} = \frac{R_1(R_1+R_2) - R_1 R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial R_p}{\partial R_1}\right|_{\overline{R}_1,\overline{R}_2} = \frac{600^2}{(400+600)^2} = 0'36$$

$$\left.\frac{\partial R_p}{\partial R_2}\right|_{\overline{R}_1,\overline{R}_2} = \frac{400^2}{(400+600)^2} = 0'16$$

$$\sigma^2_{R_p} \simeq 0'36.40^2\ \Omega^2 + 0'16.80^2\ \Omega^2 = 371'2\ \Omega^2$$

$$R_p = 240 \pm 19'3\Omega$$

I-6.

$$V = I \cdot R$$

$$\sigma_V^2 \simeq \left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_{\bar{I},\bar{R}} \sigma_I^{\ 2} + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\bar{I},\bar{R}} \sigma_R^{\ 2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial I} = R \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial I}\right|_{\bar{R},\bar{I}} = \bar{R}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = I \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial R}\right|_{\bar{I},\bar{R}} = I$$

$$\sigma_V = \frac{\bar{V}x0'2}{100} \equiv 2.10^{-3}.\bar{V}$$

$$\sigma_R - \frac{Rx0'1}{100} = 10^{-3}.\bar{R}$$

$$(2.10^{-3}\bar{V})^2 \doteq (\bar{R}\sigma_I)^2 + (\bar{I}.\bar{R}.10^{-3})^2$$

$_I$ la podemos poner $= \bar{I}xm$

$$(2.10^{-3}\bar{V})^2 \simeq (\bar{R}.\bar{I}\ m)^2 + (\bar{I}.\bar{R}.10^{-3})^2$$

como $\bar{V} = \bar{I} \cdot \bar{R}$

ya que I y R son variables separadas

$$(2.10^{-3})^2 \simeq m^2 + (10^{-3})^2$$

$$m = 1'73.10^{-3}$$

$$\sigma_I = \bar{I}.m = \bar{I}.1'73.10^{-3} \text{ Amp}$$

$$\sigma_I\% = \frac{\bar{I}.1'73.10^{-3}}{\bar{I}} \times 100 = 0'17\%$$

I-7.

$$I = \frac{V}{R}$$

$$\bar{I} = \bar{V}/\bar{R}$$

$$\sigma_I^2 \simeq \left(\frac{1}{\bar{R}}\,\sigma_V\right)^2 + \left(-\frac{\bar{V}}{\bar{R}^2}\,\sigma_R\right)^2 =$$

$$\sigma_V = \frac{\bar{V}.0'2}{100} = 2.10^{-3}\bar{V}$$

$$\sigma_R = \frac{\bar{R}x0'1}{100} = 10^{-3}.\ \bar{R}$$

$$\sigma_I^2 = \left(\frac{\bar{V}}{\bar{R}}\ .\ 2.10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{\bar{V}}{\bar{R}^2}\bar{R}10^{-3}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\bar{I}.\bar{R}}{\bar{R}}.2.10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{\bar{I}.\bar{R}.\bar{R}}{R^2}\ .\ 10^{-3}\right)^2 =$$

$$= (\bar{I}\ .\ 2.10^{-3})^2 + (\bar{I}\ .\ 10^{-3})^2$$

$$= 5.10^{-6}\ .\ \bar{I}^2$$

$$\sigma_I = \bar{I}\ .\ 2'23.10^{-3}\ \text{Amp}$$

$$\sigma_I\% = \frac{\sigma_I}{\bar{I}}\ x\ 100 = 0'22\%$$